

Las soluciones que presentaré no son las únicas soluciones: puede haber más de una manera de resolver los ejercicios. Sin embargo, es muy ilustrativo (y una buena costumbre académica) presentar las soluciones más efectivas, eficientes y económicas. Aquí presentaré las soluciones más directas confiando en que sean también las adecuadas pedagógicamente.

1. (a) Una manera válida de demostrar que  $f$  es lineal es demostrando que cumple las condiciones de la definición:

i) respeta la suma

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Presentaré una solución más directa basada en que si  $A$  es una matriz, entonces  $f(\bar{x}) = A\bar{x}$  es una aplicación lineal.

Observe que

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 5x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Como  $f$  es de la forma  $A\bar{x}$ , sabemos entonces que es lineal.

(b) Igual que en el apartado anterior, podemos demostrar que  $f$  es lineal recurriendo a la definición o también

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Efectivamente,  $f$  es una aplicación lineal.

(c) No es inmediatamente claro que esta función no es lineal, pero sospechamos que no lo es porque no tiene forma matricial evidente.

Cuando queremos demostrar que una aplicación no es lineal, nuestro primer esfuerzo debe estar dirigido a justificar una de la siguientes situaciones:

i)  $f$  no respeta la suma

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

La última situación es la más evidente:  $f(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Por tanto  $f$  no es lineal.

d) En este caso,  $f$  no tiene forma matricial evidente. Tampoco tenemos razón para pensar que no es lineal.

Procedemos a verificar que  $f$  cumple la definición de aplicación lineal.

Primero comprobamos que  $f$  respeta la suma:

Tomamos dos polinomios arbitrarios en  $\mathbb{P}_2$ ,  $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$  y

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$\begin{aligned}
 \triangleright f(p(t)+q(t)) &= 2(a_0+b_0) + (a_1+b_1) \\
 &\quad + (a_2+b_2 - a_1 - b_1)t \\
 &= 2a_0 + a_1 + (a_2 - a_1)t + 2b_0 + b_1 + (b_2 - b_1)t \\
 &= f(p(t)) + f(q(t)).
 \end{aligned}$$

Entonces  $f$  respeta la suma

Ahora comprobamos que  $f$  respeta la multiplicación escalar:

Tomamos un escalar arbitrario

$\alpha$  y un polinomio arbitrario en  $\mathbb{P}_2$ ,

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2.$$

$$\triangleright \alpha p(t) = \alpha a_0 + \alpha a_1 t + \alpha a_2 t^2$$

$$\begin{aligned}
 \triangleright f(\alpha p(t)) &= 2\alpha a_0 + \alpha a_1 + (\alpha a_2 - \alpha a_1)t \\
 &= \alpha (2a_0 + a_1 + (a_2 - a_1)t)
 \end{aligned}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Concluimos que  $f$  verifica la definición y por tanto es lineal.

(e) La componente  $x_1^2 + x_2^2$  es una pista de que  $f$  no es lineal. Verificamos que no respeta la suma.

Escogemos dos vectores arbitrarios en  $\mathbb{R}^2$ :  $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  y  $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ .

$$\triangleright \bar{x} + \bar{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \triangleright f(\bar{x} + \bar{y}) &= \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= f(\bar{x}) + f(\bar{y}) + \begin{pmatrix} 2(x_1y_1 + x_2y_2) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

( $\neq$ ) Esta aplicación es lineal. Justificamos esta conclusión comprando que se cumple la definición de aplicación lineal:

► Sean  $A, B \in M_{n,n}$  dos matrices.

$$\begin{aligned} f(A+B) &= (A+B) + (A+B)^t \\ &= A+B + A^t + B^t \\ &= (A+A^t) + (B+B^t) \\ &= f(A) + f(B). \end{aligned}$$

Por tanto  $f$  respeta la suma

► Sea  $\alpha$  un escalar y  $A \in M_{n,n}$  una matriz

$$\begin{aligned} f(\alpha A) &= (\alpha A) + (\alpha A)^t \\ &= \alpha A + \alpha A^t = \alpha (A + A^t) \\ &= \alpha f(A) \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. Se nos pide demostrar que  $f$  es lineal.

Lo demostraremos comprobando que  $f$  respeta la suma y la multiplicación escalar.

► Sea  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix} \in M$  dos

matrices. Entonces

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}\right] = f\left[\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} a+x - (b+y) & (b+y) - (a+x) \\ c+z & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-y & y-z \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

$$= f\left[\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\right] + f\left[\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right]$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



► Sea  $\alpha$  un escalar y  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M$ .

$$f \left[ \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right] = f \left[ \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a - \alpha b & \alpha b - \alpha a \\ \alpha c & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a - b & b - a \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha f \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Entonces  $f$  respeta la multiplicación escalar.

Queremos calcular la matriz asociada a  $f$  respecto de la base  $B$  dada.

Observe que como  $f: M \rightarrow M$  y no se

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

pide calcular  $M_f^{B,B}$ .

Recuerde que  $M_f^{B,B}$  viene dada

$$M_f^{B,B} = \overset{\text{por}}{\left( \begin{bmatrix} f(1\ 0) \\ 0\ 0 \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} f(0\ 1) \\ 0\ 0 \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} f(0\ 0) \\ 1\ 0 \end{bmatrix}_B \right)}$$

$$\triangleright f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f(1\ 0) \\ 0\ 0 \end{bmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\triangleright f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f(0\ 1) \\ 0\ 0 \end{bmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\triangleright f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto  $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Sean  $E_3$  y  $E_2$  las bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^2$ . La matriz asociada viene dada

por

$$M_f^{E_2, E_3} = \left( \left[ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \right] \quad \left[ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right] \quad \left[ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \right] \right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Observe que no conocemos directamente  $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ,  $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ,  $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ . Lo que sí conocemos son los siguientes datos

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿Cómo podemos utilizar los los datos para calcular  $M_f^{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3}$ ? Partiendo de los datos (y después de un poco de esfuerzo) nos damos cuenta que  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  y los datos que tenemos son las columnas de

$$M_f^{\mathcal{E}_2, B} = \left( \begin{array}{c} \left[ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right]_{\mathcal{E}_2} \\ \left[ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right]_{\mathcal{E}_2} \\ \left[ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \right]_{\mathcal{E}_2} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

¿Cómo sabemos que  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

es una base?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que  $B$  genera  $\mathbb{R}^3$  y es un conjunto linealmente independiente, por tanto una base.

Recopilando todo: tenemos  $M_f^{\mathcal{E}_2, B}$  y queremos  $M_f^{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3}$ . Así que nos enfrentamos a un problema de cambio de base según el siguiente diagrama

$$[\bar{w}]_{\mathcal{E}_2} = M_f^{\mathcal{E}_2, B} [\bar{v}]_B$$

$$P = I, \quad \boxed{T = M_f^{\mathcal{E}_2, B} P} \quad \uparrow \quad P$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Lo más difícil ha sido interpretar el problema: conectar los datos dados con lo que se nos pide. Ahora solo nos queda calcular  $P_{B \leftarrow E_3}$  y  $M_f^{E_2, E_3} = M_f^{E_2, B} P_{B \leftarrow E_3}$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P_{B \leftarrow E_3} &= P_{E_3 \leftarrow B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright M_f^{E_2, E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. La matriz que buscamos viene dada por  
 $M_f^{C,B} = \left( [f(\bar{b}_1)]_c \ [f(\bar{b}_2)]_c \ [f(\bar{b}_3)]_c \right).$

No conocemos  $f(\bar{b}_1)$ ,  $f(\bar{b}_2)$ ,  $f(\bar{b}_3)$  pero sí  
conocemos  $f(\bar{b}_1 - \bar{b}_3) = \bar{c}_1$ ,  $f(\bar{b}_2 - \bar{b}_3) = \bar{c}_1 - \bar{c}_2$   
y  $f(2\bar{b}_3) = 2\bar{c}_1 + 2\bar{c}_3$ .

La conexión entre los datos y lo que se  
nos pide es la siguiente observación:

$$\bar{b}_1 = (\bar{b}_1 - \bar{b}_3) + \bar{b}_3$$

$$\bar{b}_2 = (\bar{b}_2 - \bar{b}_3) + \bar{b}_3$$

$$\bar{b}_3 = \frac{1}{2} (2\bar{b}_3)$$

Aplicando  $f$  a estas tres ecuaciones,  
por linealidad obtenemos:

▶  $f(\bar{b}_3) = \frac{1}{2} f(2\bar{b}_3) = \frac{1}{2} (2\bar{c}_1 + 2\bar{c}_3) = \bar{c}_1 + \bar{c}_3$

▶  $f(\bar{b}_1) = f(\bar{b}_1 - \bar{b}_3) + f(\bar{b}_3) = \bar{c}_1 + \bar{c}_1 + \bar{c}_3 = 2\bar{c}_1 + \bar{c}_3$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Así que

$$M_f^{C,B} = \left( \begin{array}{ccc} [2\bar{c}_1 + \bar{c}_3]_C & [2\bar{c}_1 - \bar{c}_2 + \bar{c}_3]_C & [\bar{c}_1 + \bar{c}_3]_C \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

(b) Las columnas pivote de  $M_f^{C,B}$  nos dan las coordenadas respecto de C de una base de  $\text{Im } f$ .

$$M_f^{C,B} \sim \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Las tres columnas son pivote. Cada columna es el vector coordenada respecto de C para los elementos de la base de

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



(c) Todas las columnas de  $M_f^{C,B}$  son pivote y por tanto no hay "variables libres". Es decir, la ecuación  $M_f^{C,B} \bar{x} = \bar{0}$  tiene una única solución: la trivial  $\bar{x} = \bar{0}$ . Es decir  $\text{Nuc} f = \{\bar{0}\}$ . Como  $\dim \text{Nuc} f = 0 = \#$  variables libres, entonces toda base tiene 0 elementos. Es decir,  $\text{Nuc} f$  no tiene bases.

5. (a)  $f$  tiene representación matricial

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 + x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

por tanto  $f$  es lineal.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

- Una base para  $\text{Im}f$  consiste de las columnas pivote de la matriz asociada a  $f$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto  $\text{Im}f = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

- Para calcular una base de  $\text{Nuc}f$ , partimos de la forma escalonada ya calculada. Obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x_2 = \lambda & \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\text{Por tanto } \text{Nuc } f = \text{Gen } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Para estudiar la inyectividad y  
sobreyectiva, recordemos que

- Todas las filas de  $M_f$  tienen pivote si y solo si  $f$  es sobreyectiva
- Todas las columnas de  $M_f$  tienen pivote si y solo si  $f$  es inyectiva.

De la forma escalonada reducida  
calculada deducimos que  $f$  no es  
sobreyectiva ni inyectiva.

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

(b)  $f$  tiene representación matricial

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La matriz asociada ya se encuentra en forma escalonada reducida.

►  $\text{Im } f = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

►  $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \text{Nuc } f = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$   
 $x_2 = \lambda$   
 $x_3 = \mu$

►  $f$  no es sobreyectiva ni inyectiva.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

6. (a) V. Si  $g$  no es inyectiva entonces  $g(\bar{u}) = \bar{w}$  tiene más de una solución.

(b) V. Si  $g(\bar{u}) = g(\bar{v}) = \bar{w} \Rightarrow$   
 $\bar{0} = g(\bar{u}) - g(\bar{v}) = g(\bar{u} - \bar{v})$   
por tanto  $\bar{u} - \bar{v} \in \text{Nuc } g$ .

(c) F. Si  $g$  no es sobreyectiva entonces  $g$  no alcanza todo  $W$ .

(d) V. Para definir una aplicación lineal basta con establecer cómo actúa sobre cualquier base. Es precisamente como se describen  $f$  y  $g$ .

(e) F. Todas las aplicaciones lineales cumplen  $f(\bar{0}) = \bar{0}$ . La aplicación nula es solo un caso particular.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

5 columnas. Además,  
 $5 = \# \text{columnas} = \dim \text{Nuc} f + \dim \text{Im} f$   
Si  $\dim \text{Nuc} f = \dim \text{Im} f$ , entonces  
 $5 = 2 \dim \text{Im} f \Rightarrow \dim \text{Im} f = 5/2$   
lo cual es absurdo.

(g) V. Toda matriz asociada a  $f$  tiene 4 columnas. Si  $\dim \text{Im} f = 4$ , entonces todas las columnas son pivote. Esto implica que  $\text{Nuc} f = \{\bar{0}\}$ . Por tanto  $f(A) = \bar{0}$  tiene una única solución  $A = \bar{0}$ .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

7. (a) Se pide  $M_f^{C,B}$ :

$$\begin{aligned} M_f^{C,B} &= \left( [f(\bar{e}_1)]_C \ [f(\bar{e}_2)]_C \ [f(\bar{e}_3)]_C \right) \\ &= \left( [\bar{u}_1 - \bar{u}_2]_C \ [\bar{u}_2]_C \ [\bar{u}_1]_C \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Recordemos que

$$\dim \text{Im} f = \text{rango } M_f^{C,B} = \# \text{ pivotes de } M_f^{C,B}$$
$$M_f^{C,B} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $\dim \text{Im} f = 2$ .

(c) De la forma escalonada reducida:

$$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow \text{Base de } \text{Nuc} f: \begin{pmatrix} -1 \\ \phantom{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

(d) Estudiamos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} [\bar{y}]_c & M_f^{c,B} & [\bar{x}]_B \\ \downarrow P = I_3 \quad c \leftarrow c & \boxed{M_f^{c,B} \quad P_{B \leftarrow \tilde{B}}} & \uparrow P_{B \leftarrow \tilde{B}} \\ [\bar{y}]_c & \parallel M^{c, \tilde{B}} & [\bar{x}]_{\tilde{B}} \end{array}$$

Necesitamos calcular la matriz  $P_{B \leftarrow \tilde{B}}$ :

$$P_{B \leftarrow \tilde{B}} = \left( [\bar{v}_1]_B \quad [\bar{v}_2]_B \quad [\bar{v}_3]_B \right)$$

De las ecuaciones

$$\bar{e}_1 = \bar{v}_1, \quad \bar{e}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \quad \bar{e}_3 = \bar{v}_1 + \bar{v}_3$$

Obtenemos

$$\bar{v}_1 = \bar{e}_1, \quad \bar{v}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{v}_3 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_3$$

Por tanto  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Calculamos:

$$M_{\tilde{f}}^{C, \tilde{B}} = M_{\tilde{f}}^{C, B} P_{B \leftarrow \tilde{B}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Estudiamos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} [\bar{y}]_C & = & M_{\tilde{f}}^{C, B} [\bar{x}]_B \\ \sim P \mid & \boxed{P M_{\tilde{f}}^{C, B}} & \uparrow P = I_3 \end{array}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Ya tenemos la matriz  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos

$$M_{\tilde{c}, \tilde{B}}^{\tilde{c}, \tilde{B}} = P M_{c, B}^{c, B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

g) Se nos pide calcular  $M_{\tilde{c}, \tilde{B}}^{\tilde{c}, \tilde{B}}$ . Aprovecharemos las cuentas que ya hemos hecho.

Obtendremos  $M_{\tilde{c}, \tilde{B}}^{\tilde{c}, \tilde{B}}$  a partir de  $M_{c, B}^{c, B}$ .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Estudiamos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} [\bar{y}]_c & = & M_f^{c, \tilde{B}} [\bar{x}]_{\tilde{B}} \\ \downarrow P_{\tilde{c} \leftarrow c} & & \downarrow P_{\tilde{B} \leftarrow B} = I_3 \\ [\bar{y}]_{\tilde{c}} & = & M_f^{\tilde{c}, \tilde{B}} [\bar{x}]_{\tilde{B}} \end{array}$$

Calculamos

$$M_f^{\tilde{c}, \tilde{B}} = P_{\tilde{c} \leftarrow c} M_f^{c, \tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

(h) La inyectividad y sobreyectividad se puede estudiar usando cualquiera de las matrices asociadas. Utilizaremos  $M_f^{C,B}$ .

$$M_f^{C,B} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No todas las filas ni todas las columnas tienen pivotes, por tanto  $f$  no es inyectiva ni sobreyectiva.

8. Sea  $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  la base dada. Para estudiar la inyectividad y sobreyectividad de  $f$ , necesitamos estudiar los pivotes

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\begin{aligned}
 M_f^{B,B} &= \left( [f(\bar{e}_1)]_B \quad [f(\bar{e}_2)]_B \quad [f(\bar{e}_3)]_B \right) \\
 &= \left( [a\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3]_B \quad [\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3]_B \quad [\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + \bar{e}_3]_B \right) \\
 &= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Consideramos los siguientes casos:

►  $b = 1$ :

•  $a = 1$ :

Un pivote:

No sobreyectiva

No inyectiva.

•  $a \neq 1$

Dos pivotes:

No sobreyectiva

No inyectiva

►  $b \neq 1$ :

•  $a = 1$ :

Dos pivotes

•  $a \neq 1$

Tres pivotes

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Resumen:  $a \neq 1$  y  $b \neq 1 \Rightarrow$  Biyectiva

$a = 1$  o  $b = 1 \Rightarrow$  No sobreyectiva  
No inyectiva

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ Intercambiar } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

fila 1 y fila 3

• fila 2 - fila 1

• fila 3 - a fila 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 1-a & 1-a \end{pmatrix} \text{ Intercambiar } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

fila 2 y fila 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70